数理解析研究所講究録
第 820 巻 1993 年 112-118

大きさ１６，制約数１５，強さ２の２シンボル直交配列の同型類

国際自然研　山本純恭 (Sumiyasu Yamamoto)
国際自然研・岡山理大　藤井淑夫 (Yoshio Fujii)
国際自然研・岡山理大　兵頭義史 (Yoshifumi Hyodo)
岡山理大　弓場　弘 (Hiromu Yumiba)

定義１(直交配列).　Ｔを$n\times m$(0,1)-配列とする．Ｔの任意のt列からなる部分配列T_0において，すべてのt次元行ベクトルがT_0の行として丁度λ回現れるとき，Ｔを大きさn，制約数m，強さt，指標λの２シンボル直交配列といい2-OA(t,m,λ)で表わす．

2-OA(t,m,λ)の全体を**2-OA**(t,m,λ)とし，ある1行の要素がすべて1からなる2-OA(t,m,λ)の全体を**2-OA***(t,m,λ)とする．

定義２(直交配列の同型性).　２つの直交配列Ｓ，Ｔ(∈**2-OA**(t,m,λ))において，一方が他方の列の置換および列内のシンボル置換によって(行の順序を度外視)一致するとき互に同型であるという．

(注) 2^m要因計画において，直交配列はm因子に関するn個の処理組合せ(行)の集りであるから，行の順序は意味をもたない．

定義３(アダマール行列).　要素が1，-1からなるn次行列H_nで，$H_nH_n'=nI_n$(I_nはn次単位行列，A′はAの転置行列)を満足するものを位数nのアダマール行列(H-行列)という．

位数nのH-行列の全体を$\mathbf{H}_n$，要素がすべて1からなる列を含むH-行列の全体を$\mathbf{H}_n^+$，第1行およ

び第1列の要素がすべて1からなるH-行列の全体を$\mathbf{H}_n^{++}$とする.

<u>**定義4**</u>**(アダマール行列の同型性)**. 2つのアダマール行列G, H($\in \mathbf{H}_n$)において, (i)行の置換, (ii)列の置換, (iii)行内の1, -1の置換, (iv)列内の1, -1の置換, によって一方が他方と一致するとき互に同型であるという.

(注)直交配列では行内の0, 1の置換は許されない.

<u>**補題1**</u>. 直交配列T($\in$ **2-OA**$(2, 4\lambda-1, \lambda)$)において(i)0を-1に置き換え, (ii)要素がすべて1からなる列をある列の間に挿入する, ことによって$\mathbf{H}_{4\lambda}^{+}$に属するH-行列が構成される. またこの逆の手続きも可能である.

補題1の手続きによって直交配列Tから得られるH-行列はTと互に随伴するという.

<u>**補題2**</u>. 2つの同型な直交配列S, T$\in$ **2-OA**$(2, 4\lambda-1, \lambda)$に随伴するH-行列G, H$\in \mathbf{H}_{4\lambda}$は互に同型である.

この補題の逆は一般に不明である.

<u>**系3**</u>. 2つの同型でないH-行列G, H$\in \mathbf{H}_{4\lambda}^{+}$に随伴する直交配列S, T$\in$ **2-OA**$(2, 4\lambda-1, \lambda)$は同型でない.

次の定理は補題2(系3)の逆が成立するかどうかのアプローチを与える.

<u>**定理4**</u>. すべての2シンボル直交配列T$\in$ **2-OA**$(2, 4\lambda-1, \lambda)$は$\mathbf{H}_{4\lambda}$のすべての代表元について行の1, -1の置換によって任意の列のすべての要素を1に代えて得られる$\mathbf{H}_{4\lambda}^{+}$に属するH-行列に随伴するすべての直交配列のどれかと同型である.

<u>命題5</u> (Hall, M., Jr. (1961)). アダマール行列全体$\mathbf{H}_{16}$の同型類の個数は５である.

$\mathbf{H}_{16}$の５個の同型類の代表元$\in \mathbf{H}_{16}^{++}$ は次表で与えられる.

表１．位数16のH-行列全体の代表元$\in \mathbf{H}_{16}^{++}$ (Hall, M., Jr. (1961) の転置)

［Ⅰ］

```
1111111111111111
11111111--------
1111----1111----
1111--------1111
11--11--11--11--
11--11----11--11
11----1111----11
11----11--1111--
1-1-1-1-1-1-1-1-
1-1-1-1--1-1-1-1
1-1--1-11-1--1-1
1-1--1-1-1-11-1-
1--11--11--11--1
1--11--1-11--11-
1--1-11-1--1-11-
1--1-11--11-1--1
```

［Ⅱ］

```
1111111111111111
11111111--------
1111----1111----
1111--------1111
11--11--11--11--
11--11----11--11
11----1111----11
11----11--1111--
1-1-1-1-1-1-1-1-
1-1-1-1--1-1-1-1
1-1--1-11-1--1-1
1-1--1-1-1-11-1-
1--11--11--1-11-
1--11--1-11-1--1
1--1-11-1--11--1
1--1-11--11--11-
```

［Ⅲ］

```
1111111111111111
11111111--------
1111----1111----
1111--------1111
11--11--11--11--
11--11----11--11
11----1111----11
11----11--1111--
1-1-1-1-1-1-1-1-
1-1-1-1--1-1-1-1
1-1--1-11--1-11-
1-1--1-1-11-1--1
1--11--11-1--1-1
1--11--1-1-11-1-
1--1-11-1--11--1
1--1-11--11--11-
```

［Ⅳ］

```
1111111111111111
11111111--------
1111----1111----
1111--------1111
11--11--11--11--
11--11----11--11
11----111-1-1-1-
11----11-1-1-1-1
1-1-1-1-11----11
1-1-1-1---1111--
1-1--1-11--1-11-
1-1--1-1-11-1--1
1--11--11-1--1-1
1--11--1-1-11-1-
1--1-11-1--11--1
1--1-11--11--11-
```

［Ⅴ］

```
1111111111111111
11111111--------
1111----1111----
1111--------1111
11--11--11--11--
11--11----11--11
11----1111----11
11----11--1111--
1-1-1-1-1-1-1-1-
1-1-1--11--1-1-1
1-1--11--1-11--1
1-1--1-1-11--11-
1--11-1--1-1-11-
1--11--1-11-1--1
1--1-11-1-1--1-1
1--1-1-11--11-1-
```

（”-” は－１を意味する）

系3および命題5から次の補題が成立する.

<u>補題6</u>. 直交配列全体**2-OA**(2, 15, 4)の同型類の個数は５以上である.

本報告では, **2-OA**(2, 15, 4)の同型類の個数について述べる. 表1における$\mathbf{H}_{16}$の同型類の各代表元について定理4の方法で導かれる16個の随伴する直交配列($\in$ **2-OA***(2, 15, 4))の列およびシンボルの置換に関する同型関係を調べるには, 各々最大$15! \times 2^{15} \fallingdotseq 4.28 \times 10^{16}$通り調べなければならないことから殆ど不可能に近い. 実行可能な方法の一つとして以下に述べるある意味

での正規化による比較を試みた．すなわち16×5＝80個の随伴する直交配列の列および行をこの順に大小順序に変換する手続き(列&行法)およびその逆の手続き(行&列法)を反復し，収束した結果の一致性を調べて次表を得た．

表2.　正規化で一致しない2-OA(2,15,4)の個数

随伴する**2-OA**(2,15,4)	[I]	[II]	[III]	[IV]	[V]
列 & 行　法	1	1	2	2	8
行 & 列　法	1	2	16	7	5

このことから，直交配列全体**2-OA**(2,15,4)の同型類の個数は，高々11個であることがわかる．

これら11個の一致しない直交配列(∈**2-OA***(2,15,4))は下記の表で与えられる．

表3.　11個の一致しない2-OA(2,15,4)

[I-1]

```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1·1··1·1·1·1
·1··1·11·1··1·1
·1··1·1·1·11·1·
··11··11··11··1
··11··1·11··11·
··1·11·1··1·11·
··1·11··11·1··1
```

[II-1]

```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1·1··1·1·1·1
·1··1·11·1··1·1
·1··1·1·1·11·1·
··11··11··1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[III-1]

```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1·1··1·1·1·1
·1··1·11··1·11·
·1··1·1·11·1··1
··11··11·1··1·1
··11··1·1·11·1·
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[III-2]

```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1·1··1·1·1·1
·1··1·11··11··1
·1··1·1·11··11·
··11··11··1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1·1··1·1
··1·11··1·11·1·
```

[IV-1]

```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····111·1·1·1·
1····11·1·1·1·1
·1·1·1·11····11
·1·1·1···1111··
·1··1·11··1·11·
·1··1·1·11·1··1
··11··11·1··1·1
··11··1·1·11·1·
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[IV-2]

```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····111·1·1·1·
1····11·1·1·1·1
·1·1·1·11····11
·1·1·1···1111··
·1··1·11··11··1
·1··1·1·11··11·
··11··11··1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1·1··1·1
··1·11··1·11·1·
```

[V-1]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1··11··1·1·1
·1··11··1·11··1
·1··1·1·11··11·
··11·1··1·1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1·1··1·1
··1·1·11··11·1·
```

[V-2]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··1·1·1·1···11
1···1·1··111·1·
1····11·1·1·1·1
·1·11···1·1··11
·1·1·1···1111··
·1··1·11·1··1·1
·1···1111··1·1·
··11··11··1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[V-3]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··1·1·1·1···11
1···1·1··111·1·
1····11·1·1·1·1
·1·11····11·1·1
·1·1·1··1·11·1·
·1··1·111····11
·1···111·1·11··
··11··11··11··1
··11··1·11··11·
··1·11·1··1·11·
··1·11··11·1··1
```

[V-4]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··1·1···111·1·
1···1·11·1···11
1····11·1·1·1·1
·1·11····11·1·1
·1·1·1·11····11
·1··1·1·1·11·1·
·1···111·1·11··
··11··11··1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[V-5]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··1·1···111·1·
1···1·11·1···11
1····11·1·1·1·1
·1·11···1·1··11
·1·1·1·1·1··1·1
·1··1·1··1111··
·1···1111··1·1·
··11··11··11··1
··11··1·11··11·
··1·11·1··1·11·
··1·11··11·1··1
```

(点 "·" は0を意味する)

上記直交配列[I-1];[II-1];[III-1],[III-2];[IV-1],[IV-2];[V-1]〜[V-5]について,それらの同型性を調べるため,各直交配列の第1行を削除して得られるアダマール型SBIBD($v^*=15$, $k^*=7$, $\lambda^*=3$)について,すべての3個の処理(列)の組(triplet)のブロック(行)における出現回数を調べる.出現回数が丁度3(triple)であるtripletを列挙して次表を得た.

表4.SBIBD においてtripleに出現するtriplet

[I-1]:
{0, 1, 2} {0, 3, 4} {0, 5, 6} {0, 7, 8} {0, 9, 10} {0, 11, 12} {0, 13, 14}
{1, 3, 5} {1, 4, 6} {1, 7, 9} {1, 8, 10} {1, 11, 13} {1, 12, 14}
{2, 3, 6} {2, 4, 5} {2, 7, 10} {2, 8, 9} {2, 11, 14} {2, 12, 13}
{3, 7, 11} {3, 8, 12} {3, 9, 13} {3, 10, 14}
{4, 7, 12} {4, 8, 11} {4, 9, 14} {4, 10, 13}
{5, 7, 13} {5, 8, 14} {5, 9, 11} {5, 10, 12}
{6, 7, 14} {6, 8, 13} {6, 9, 12} {6, 10, 11}

[Ⅱ-1]: {0, 1, 2}{0, 3, 4}{0, 5, 6}{0, 7, 8}{0, 9,10}{0,11,12}{0,13,14}
{1, 3, 5}{1, 4, 6}{1, 7, 9}{1, 8,10}{1,11,13}{1,12,14}
{2, 3, 6}{2, 4, 5}{2, 7,10}{2, 8, 9}{2,11,14}{2,12,13}

[Ⅲ-1],[Ⅲ-2]: {0, 1, 2}{0, 3, 4}{0, 5, 6}{0, 7, 8}{0, 9,10}{0,11,12}{0,13,14}
{1, 3, 5}{1, 4, 6}
{2, 3, 6}{2, 4, 5}

[Ⅳ-1],[Ⅳ-2]: {0, 1, 2}{0, 3, 4}{0, 5, 6}
{1, 3, 5}{1, 4, 6}
{2, 3, 6}{2, 4, 5}

[Ⅴ-1]: {0, 1, 2}{0, 3, 4}{0, 5, 6}{0, 7, 8}{0, 9,10}{0,11,12}{0,13,14}

[Ⅴ-2]～[Ⅴ-5]: {0, 1, 2}
{2, 3, 6}{2, 4, 5}{2, 7,10}{2, 8, 9}{2,11,14}{2,12,13}

表4におけるSBIBDのtripletの個数は，それぞれ35, 19, 11, 7, 7である．[Ⅰ]～[Ⅲ]と[Ⅳ]∪[Ⅴ]はtripletの個数が異なるから列の置換では互に移れない．一方[Ⅴ-2]～[Ⅴ-5]は，各々に置換$\sigma=(0,2)(4,6)(8,10)(12,14)$を施すことにより[Ⅴ-1]に移すことができる.[Ⅲ],[Ⅳ],[Ⅴ]のグループごとに，直交配列の同型性を調べるために,それぞれのtripletの集合を保存する置換群を考える．その置換群の位数は[Ⅰ]，[Ⅱ]を含めて次表で与えられる.

tripletの集り	[Ⅰ]	[Ⅱ]	[Ⅲ]	[Ⅳ]	[Ⅴ]
位数	20160	2304	9216	6773760	645120

これらの列の置換を各直交配列に順次施し基準配列に一致するかどうかを調べ，次表を得た.

表５．グループ内での直交配列が一致する列の置換

配列	置換		基準配列
[Ⅲ-2]	(3,5)(4,6)(11,13)(12,14)	→	[Ⅲ-1]
[Ⅳ-2]	(1,2)(3,6,4,5)(8,9)(12,13)	→	[Ⅳ-1]
[Ⅴ-2]	(0,1,2)(3,5,4)(7,11)(8,13,10,12,9,14)	→	[Ⅴ-1]
[Ⅴ-3]	(0,1,2)(4,5,6)(8,9,10)(12,13,14)	→	[Ⅴ-1]
[Ⅴ-4]	(0,1,2)(3,5,4)(8,9,10)(12,13,14)	→	[Ⅴ-1]
[Ⅴ-5]	(0,1,2)(4,5,6)(7,11)(8,13,10,12,9,14)	→	[Ⅴ-1]

以上の結果を要約して次の定理を得た.

定理７. 直交配列全体**2-OA**(2, 15, 4)の同型類の個数は５である.

これらの同型類の代表元(∈**2-OA***(2, 15, 4))は次表の通りである.

表６． **2-OA**(2, 15, 4)の同型類の代表元

[Ⅰ]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1·1··1·1·1·1
·1··1·11·1··1·1
·1··1·1·1·11·1·
··11··11··11··1
··11··1·11··11·
··1·11·1··1·11·
··1·11··11·1··1
```

[Ⅱ]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1·1··1·1·1·1
·1··1·11·1··1·1
·1··1·1·1·11·1·
··11··11··1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[Ⅲ]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1·1··1·1·1·1
·1··1·11··1·11·
·1··1·1·11·1··1
··11··11·1··1·1
··11··1·1·11·1·
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[Ⅳ]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····111·1·1·1·
1····11·1·1·1·1
·1·1·1·11····11
·1·1·1···1111··
·1··1·11··1·11·
·1··1·1·11·1··1
··11··11·1··1·1
··11··1·1·11·1·
··1·11·1··11··1
··1·11··11··11·
```

[Ⅴ]
```
111111111111111
1111111········
111····1111····
111········1111
1··11··11··11··
1··11····11··11
1····1111····11
1····11··1111··
·1·1·1·1·1·1·1·
·1·1··11··1·1·1
·1··11··1·11··1
·1··1·1·11··11·
··11·1··1·1·11·
··11··1·11·1··1
··1·11·1·1··1·1
··1·1·11··11·1·
```

(点 "・" は0を意味する)

参　考　文　献

[1] Hall, M., Jr.(1961): "Hadamard matrices of order 16", Research Summary No. 36-10, Vol. 1, pp. 21-26, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California.

[2] 山本,藤井,兵頭,弓場(1992) : "位数16のアダマール行列から導かれる直交配列の同値類" 日本数学会(福岡大学), pp. 145-146.

[3] Yamamoto, S., Y. Fujii, Y. Hyodo and H. Yumiba (1992): "Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength 2, size 16, 15 (maximal) constraints and index 4", SUT Journal of Mathematics Vol. 28-1, 47-59.